Problemă. Pentru n număr natural rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia

$$x^4 + y^4 = 13^n.$$

Manuela Prajea, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Dacă $n = 0$ ecuaţia devine

$$x^4 + y^4 = 1$$

cu soluţiile $(\pm 1; 0)$ şi $(0; \pm 1)$.

Dacă $n \neq 0$, atunci 13^n este divizibil cu 13.

Orice număr întreg p dă la împărţirea cu 13 unul din resturile 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. Atunci p^2 dă la împărţirea cu 13 unul din resturile 0,1,3,4,9,10,12, iar p^4 unul din resturile 0,1,3,9. Se observă că singura variantă care poate conduce la

$$x^4 + y^4 = 13^n$$

este cea cu x^4, y^4 divizibile cu 13, adică cea cu x, y divizibili cu 13.

Dacă (x, y) este o soluţie a ecuaţiei din enunţ cu $n > 0$, atunci $x = 13x_1$, $y = 13y_1$, unde $x_1^4 + y_1^4 = 13^{n-4}$. Dacă $n - 4 > 0$ găsim că $x_1 = 13x_2$, $y_1 = 13y_2$ şi $x_2^4 + y_2^4 = 13^{n-8}$. Continuăm procedeul până când, după k paşi, ajungem la ecuaţia $x_k^4 + y_k^4 = 13^{n-4k}$, unde $r = n - 4k \in \{0, 1, 2, 3\}$ este restul împărţirii lui n la 4.

Dacă $r \in \{1, 2, 3\}$ (adică n nu este divizibil cu 4) atunci am văzut că $x_k = 13x_{k+1}$, $y_k = 13y_{k+1}$, deci membrul stâng este divizibil cu 13^4 în vreme ce membrul drept nu este divizibil cu 13^4. Prin urmare, dacă n nu este divizibil cu 4, ecuaţia nu are soluţii.

Dacă $r = 0$ (adică n este divizibil cu 4) rezultă că $(x_k, y_k) \in \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$, de unde obţinem

$(x, y) \in \{(\pm 13^m, 0),\ (0, \pm 13^m)\}$, unde $m = \dfrac{n}{4}$.

În concluzie, dacă n nu este divizibil cu 4 atunci ecuaţia nu are soluţii, iar dacă $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$, atunci ecuaţia are soluţiile $(\pm 13^m, 0)$ şi $(0, \pm 13^m)$.