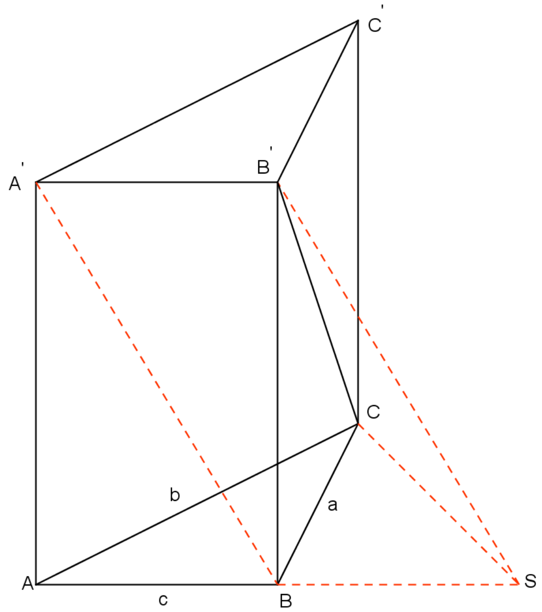
Problemă. Se consideră $ABCA'B'C'$, o prismă dreaptă având $AA' > \max\{AB,\ BC,\ CA\}$ şi $\sphericalangle(A'B,\ B'C) \equiv \sphericalangle(B'C,\ C'A) \equiv \sphericalangle(C'A,\ A'B)$.

Arătaţi că baza prismei este un triunghi echilateral.

Manuela Prajea, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Fie $S \in AB$ astfel încât $A'BSB'$ este paralelogram. Notăm $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AA' = x$ şi $\sphericalangle(A'B,\ B'C) = \alpha$, $\alpha \in (0°;\ 90°]$. Construind paralelogramul $A'B'SB$ avem $m(\widehat{SB'C}) = \alpha$ sau $m(\widehat{SB'C}) = 180° - \alpha$ şi $B'S = \sqrt{c^2 + x^2}$, $B'C = \sqrt{a^2 + x^2}$.



În triunghiul ACS, $[CB]$ este mediană şi din teorema medianei obţinem

$$CS^2 = 2a^2 - b^2 + 2c^2, \qquad (1)$$

iar cu teorema cosinusului în triunghiul $SB'C$ obţinem

$$CS^2 = a^2 + c^2 + 2x^2 \pm 2\sqrt{(a^2 + x^2)(c^2 + x^2)} \cos\alpha. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\pm 2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2-b^2+c^2. \qquad (3)$$

Dacă vom considera paralelogramele $B^{'}C^{'}TC$, $(T\in BC)$ şi $C^{'}A^{'}UA$, $(U\in AC)$ obţinem relaţiile analoage cu (3):

$$\pm 2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2+b^2-c^2, \qquad (4)$$

$$\pm 2\sqrt{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2-a^2+b^2+c^2. \qquad (5)$$

Cum $x>\max\{a,b,c\}$ deducem $2x^2>a^2+c^2>a^2-b^2+c^2$ şi deci $-2x^2+a^2-b^2+c^2<0$. La fel şi analoagele, $-2x^2-a^2+b^2+c^2<0, -2x^2+a^2+b^2-c^2<0$.

Cu aceasta, relaţiile (3), (4) şi (5) devin

$$-2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2-b^2+c^2, \qquad (3^{'})$$

$$-2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\cos\alpha = -2x^2+a^2+b^2-c^2, \qquad (4^{'})$$

$$-2\sqrt{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\cos\alpha = -2x^2-a^2+b^2+c^2. \qquad (5^{'})$$

Scăzând relaţiile $(3^{'})$ şi $(4^{'})$ obţinem

$$\sqrt{x^2+a^2}\left(\sqrt{x^2+b^2}-\sqrt{x^2+c^2}\right)\cos\alpha = c^2-b^2$$

sau

$$\sqrt{x^2+a^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{x^2+c^2}}\cos\alpha = c^2-b^2,$$

de unde

$$(b^2-c^2)\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{x^2+c^2}}\cos\alpha+1\right)=0.$$

De aici deducem

$$b^2-c^2=0$$

(cealaltă paranteză fiind pozitivă) şi deci

$$b = c.$$

Analog, scăzând relaţiile $(3^{'})$ şi $(5^{'})$ obţinem

$$a = b.$$

În concluzie, baza prismei este un triunghi echilateral.