**Problemă.** Se consideră şirul $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ definit astfel: $a_1 = 6,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 5$ şi pentru $n \geq 5$, $n$ număr natural, $a_n$ se defineşte ca fiind ultima cifră a sumei celorlalţi patru termeni precedenţi. Astfel, prin concatenare, şirul devine: 61052850... .

Arătaţi că secvenţa 2012 este în şir.

*Manuela Prajea, Drobeta-Turnu Severin*

**Soluţie.** Considerăm toate grupurile de patru cifre consecutive disjuncte care apar în şir. Adică: 6105, 2850, 5881, ... şi cum sunt $10^4$ grupuri de patru cifre posibile, deducem că la un moment dat un grup de patru cifre se va repeta, de exemplu $\overline{abcd}$. Din regula de definire a şirului deducem că următoarele cifre care vor apărea după grupul $\overline{abcd}$ vor fi unic determinate de aceste patru cifre, deci şi acestea se vor repeta, adică dacă după grupul $\overline{abcd}$ va apărea grupul $\overline{efgh}$, atunci din nou după apariţia grupului $\overline{abcd}$ va apărea grupul $\overline{efgh}$, etc şi şirul devenind astfel, de la un moment dat, periodic. De fapt, din modul în care este definit şirul, se vede că şi termenii care preced un grup $\overline{abcd}$ sunt unic determinaţi de cifrele $a, b, c, d$, deci cifrele care preced un grup $\overline{abcd}$ vor fi mereu aceleaşi pentru fiecare repetare a grupului $\overline{abcd}$. De aici rezultă că şirul este periodic de la început. Prin urmare grupul 6105 va mai apărea în şir. Ne uităm la a doua apariţie a grupului 6105. Aplicând regula de determinare a termenilor şirului, deducem că termenii din stânga grupului 6105 sunt în ordine: 8, apoi 5, apoi 2, apoi 1, apoi 0, apoi 2, etc, deci o secvenţă din şir este: ...$\underline{2012}$586105..., adică secvenţa 2012 este în şirul dat.