

REIHEN

Anfangend von eine gegebene Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ kann man, durch Summation, eine neue Folge, $(s_n)_{n \geq n_0}$, folgenderweise definieren:

$$s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k, \quad n \geq n_0.$$

Zum Beispiel, für $a_n = n$, $n \geq 1$, also für die Folge $1, 2, 3, 4, \dots$ erhält man die Folge: $s_1 = 1$, $s_2 = 1+2$, $s_3 = 1+2+3$, $s_4 = 1+2+3+4$, \dots , $s_n = 1+2+3+\dots+n$, also die Folge: $1, 3, 6, 10, \dots$, oder, kurz, $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

Definition 1. (Reihe) Es seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in \mathbb{R} . Die Summe $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$, $n \geq n_0$, heisst die n -te Partialsumme dieser Folge.

Die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ der Partialsummen heisst Reihe.

Man bezeichnet diese Reihe mit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ oder $\sum_{n \geq n_0} a_n$.

a_n ist der allgemeine Glied der Reihe.

Definition 2. (konvergente Reihe) Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heisst konvergent, falls die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ der Partialsummen konvergent ist, andernfalls heisst sie divergent. Der Grenzwert der Folge (s_n) ist Summe der Reihe (oder Grenzwert der Reihe) genannt und wird ebenfalls mit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Beispiel 1. (geometrische Reihe)

Es sei $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, und die geometrische Folge $a_n = b^n$, $n \geq 0$. Wir betrachten

die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \geq n_0}$, $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Es ist bekannt dass

$$s_n = \begin{cases} \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} & \text{wenn } b \neq 1 \\ n + 1, & \text{wenn } b = 1 \end{cases}$$

Die Reihe $\sum_{n \geq 0} b^n$ ist konvergent wenn die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ konvergent ist. Als $n + 1$

divergent ist und $\frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$ konvergent nur für $b \in (-1, 1)$ ist, folgt es, dass die

Reihe $\sum_{n \geq 0} b^n$ konvergent ist wenn und nur wenn $b \in (-1, 1)$. In diesem Fall kann

man auch die Summe der Reihe berechnen:

$$\sum_{n \geq 0} b^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} = \frac{1}{1 - b}.$$

Beispiel 2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Reihe. Tatsächlich, wie wir es beweisen werden, ist diese Reihe eine monoton steigende und beschränkte Reihe, deshalb also auch eine konvergente Reihe.

Die Folge der Partialsummen, $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ ist eine steigende Folge denn

$$s_{n+1} - s_n = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Diese Folge ist auch beschränkt denn $s_n \geq s_1 = 1$ und $s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$

Wir haben die Gleichung $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ benützt.

Obwohl es ziemlich leicht gewesen ist die Konvergenz dieser Reihe zu beweisen, es ist viel schwieriger seine Summe zu berechnen. Es reicht zu sagen dass es bekannt ist dass $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, um sehen zu können dass die Entdeckung der Wert der Summe keine einfache Sache sein kann.

Die obige Situation ist typisch bei der Untersuchung der Konvergenz von Reihen: wenn man für die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ keine Berechnungsformel geben kann, dann ist die Summe nur sehr selten berechnbar. Deshalb ist man bei der Untersuchung der Konvergenz der Reihen, im allgemeinen nur um die Bestimmung der „Natur“ der Reihe interessiert: „Ist die Reihe konvergent oder divergent?“

Für die Konvergenz einer Reihe ist das „**Verhalten am Anfang**“ gleichgültig; das heisst:

Satz 1. (Verhalten am Anfang)

Für beliebiges $m \geq n_0$ ist $\sum_{n \geq m} a_n$ konvergent wenn und nur wenn $\sum_{n \geq n_0} a_n$ konvergent ist.

Beweis: Die Folge der Partialsummen der zweiten Reihe ist $s_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{m-1} + a_m + \dots + a_n$, oder $s_n = a_{n_0} + \dots + a_{m-1} + s'_n$ wo $(s'_n)_{n \geq m}$ die Folge der Partialsummen der ersten Reihe ist. Dann ist es leicht zu sehen, dass $(s_n)_{n \geq n_0}$

konvergent ist wenn und nur wenn $(s'_n)_{n \geq m}$ konvergent ist und dass, in diesem Fall,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_{n_0} + \dots + a_{m-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$, also $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + \dots + a_{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} a_n$. \square

Satz 2. Es seien $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann

sind die Reihen $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n$ auch konvergente Reihen und es gilt

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ und } \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Beweis: Es seien $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$, $s'_n = \sum_{k=n_0}^n b_k$, $n \geq n_0$ und $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$.

Dann ist es bekannt dass die Folgen $(s_n + s'_n)_{n \geq n_0}$ und $(\alpha s_n)_{n \geq n_0}$ auch konvergente Folgen sind und dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + s'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \ell_1 + \ell_2$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha s_n) = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha \cdot \ell_1. \quad \square$$

Satz 3. (Notwendige Bedingung der Konvergenz)

Wenn $\sum_{n \geq n_0} a_n$ eine konvergente Reihe ist, dann ist die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Beweis: Die Folge der Partialsummen erfüllt $s_n = \underbrace{a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n = s_{n-1} + a_n$.

Wenn $\sum_{n \geq n_0} a_n$ eine konvergente Reihe ist die die Summe $S = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hat, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

Die obige Bedingung ist also eine notwendige Bedingung für Konvergenz, aber nicht eine genügende Bedingung.

Beispiel 3. Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{1000n + 1}$ ist divergent weil $a_n = \frac{n}{1000n + 1} \rightarrow \frac{1}{1000} \neq 0$.

Beispiel 4. Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \sin n$ ist divergent weil es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nicht gibt.

Beispiel 5. Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ ist divergent obwohl $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0$.

Tatsächlich, $s_n = \sum_{k \geq 0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k \geq 0}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} =$

$$\sum_{k \geq 0}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - (k+1)} = -\sum_{k \geq 0}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) =$$

$$-[(\sqrt{0} - \sqrt{1}) + (\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})] = -(\sqrt{0} - \sqrt{n+1}) =$$

$$\sqrt{n+1} \rightarrow \infty.$$

Also gilt die Umkehrung des obigen Satzes nicht, das heisst, aus der Bedingung

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ folgt es nicht dass die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Satz 4. (Cauchy-Kriterium) Sei $\sum_{n \geq n_0} a_n$ eine Reihe in \mathbb{R} . Dann sind äquivalent:

(a) Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq m \geq N_0(\varepsilon).$

Beweis: Für die Folge der Partialsummen gilt dass $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$. Die Bedingung (b) ist also äquivalent dazu, dass $(s_n)_{n \geq n_0}$ eine Cauchyfolge ist. Nach Satz ("Jede Cauchyfolge in \mathbb{R} ist eine konvergente Folge.") ist das äquivalent dazu, dass $(s_n)_{n \geq n_0}$ konvergent ist. \square

Beispiel 6. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heisst die harmonische Reihe. Sie ist divergent weil sie die Bedingung (b) nicht erfüllt. Tatsächlich, sollte man in (b) $n = 2m \geq m$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nehmen, dann:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m} =$$

$$m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Also für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ lässt sich kein $N_0(\varepsilon)$ finden so dass die Bedingung $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N_0(\varepsilon)$ erfüllt ist.

Die harmonische Reihe ist ein zweites Beispiel von eine Reihe die die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ erfüllt obwohl sie divergent ist.

REIHEN MIT POSITIVE GLIEDER

Der Fall der Reihen mit $a_n > 0, \forall n \geq n_0$ hat eine besondere Wichtigkeit: erstens weil solche Reihen sehr oft vorkommen und zweitens weil diese Reihen sich besser studieren lassen:

aus $s_n = s_{n-1} + a_n$, folgt dass $s_n - s_{n-1} = a_n > 0$, also dass die Folge der Partialsummen eine *steigende* Folge ist.

Wenn die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ auch beschränkt ist, dann ist sie konvergent, also ist in diesem Fall die Reihe $\sum_{n \geq n_0} a_n$ konvergent.

Wenn die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ nicht beschränkt ist, dann hat sie den Grenzwert

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, also ist in diesem Fall die Reihe $\sum_{n \geq n_0} a_n$ divergent.

Für positive Reihen stellt man also die Frage:

Ist die Reihe $\sum_{n \geq n_0} a_n$ konvergent oder hat sie den Grenzwert $+\infty$?"

Leider gibt es keine Methode die die obige Frage deutlich beantwortet. Jedoch gibt es Kriterien die wenn man sie anwenden kann, die Frage beantworten.

1. Majorantenkriterium

Satz 5. (Majorantenkriterium)

Seien $\sum_{n \geq n_1} a_n$ und $\sum_{n \geq n_2} b_n$ Reihen die die Bedingung $0 < a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ erfüllen. Dann gilt es:

wenn $\sum_{n \geq n_2} b_n$ konvergent ist, dann ist $\sum_{n \geq n_1} a_n$ auch konvergent.

Beweis: Wenn die Reihe $\sum_{n \geq n_2} b_n$ konvergent ist, dann ist die Folge $(s'_n)_{n \geq n_0}$,

$s'_n = \sum_{k=n_0}^n b_k$ konvergent, also beschränkt. Aber, als $a_k \leq b_k, \forall k \geq n_0$, ist die

Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k \leq \sum_{k=n_0}^n b_k$ auch beschränkt. Sie ist

auch steigend, also ist sie konvergent. Weil $\sum_{n \geq n_0} a_n$ konvergent ist, folgt dass $\sum_{n \geq n_1} a_n$

auch konvergent ist (laut des Satzes „Verhalten am Anfang“, es ist unwichtig mit welchem Glied man die Reihe anfängt). \square

Folgerung 1. (Minorantenkriterium)

Seien $\sum_{n \geq n_1} a_n$ und $\sum_{n \geq n_2} b_n$ Reihen die die Bedingung $0 < a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ erfüllen. Dann gilt es:

wenn $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent ist, dann ist $\sum_{n \geq n_2} b_n$ auch divergent.

Beweis: Wir benützen die „Reductio ad absurdum“. Nehmen wir an dass $\sum_{n \geq n_2} b_n$ konvergent ist. Nach dem Majorantenkriterium folgt dass $\sum_{n \geq n_1} a_n$ auch konvergent ist, also ein Widerspruch. \square

Beispiel 7. Im Beispiel 2. haben wir bewiesen dass $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist. Dies haben wir bewiesen indem man eigentlich bewiesen hat dass $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ konvergent ist und, als $0 < a_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = b_n, \forall n \geq 2$, folgte dass $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ auch konvergent ist.

Beispiel 8. Die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent.

Beweis (Methode 1.): $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$ und $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ ist divergent (Beispiel 6.).

Nach dem Minorantenkriterium ist also $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ auch divergent.

Beweis (Methode 2.): $0 < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$ und $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

ist divergent (Beispiel 5.). Nach dem Minorantenkriterium ist also $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ di-

vergent. Nach Satz 2. (mit $\alpha = 2$) folgt dass $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ auch divergent ist.

Bemerkung. Wie bei Methode 1. beweist man dass $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ für alle $\alpha \leq 1$ divergent ist.

Beispiel 9. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent für alle $\alpha \geq 2$.

Beweis: $0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \geq 1$ und $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, also, laut das Majorantenkriterium, ist $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent, $\forall \alpha \geq 2$.

Konklusion: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent wenn $\alpha \geq 2$ und divergent wenn $\alpha \leq 1$. Wir werden später sehen was passiert wenn $\alpha \in (1, 2)$. (Da haben wir $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ und $0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n}$, aber keine von diese Ungleichungen hilft uns um, mit Hilfe der Majoranten- oder Minorantenkriteriums, zu entscheiden ob die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent oder divergent ist.)

Das zeigt uns die Schranken von diesen Kriterium:

wenn $0 < a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$ und $\sum_{n \geq n_0} a_n$ konvergent ist oder $\sum_{n \geq n_0} b_n$ divergent ist, da folgt nichts über die andere Reihe. Da braucht man andere Kriterien.

2. Vergleichungskriterium

Satz 6. (Vergleichungskriterium)

Seien $\sum_{n \geq n_1} a_n$ und $\sum_{n \geq n_2} b_n$ Reihen mit $a_n, b_n > 0$, $\forall n \geq n_0$. Wenn es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ gibt und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, \infty)$ dann haben die Reihen $\sum_{n \geq n_1} a_n$ und $\sum_{n \geq n_2} b_n$ dieselbe Natur, d.h. sie sind entweder beide konvergent, oder beide divergent.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ so dass $\ell - \varepsilon > 0$. Weil $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$, es gibt $n'_0 \geq n_0$ so dass $\ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$, $\forall n \geq n'_0$. Also, für $n \geq n'_0$, gilt es $(\ell - \varepsilon)b_n < a_n < (\ell + \varepsilon)b_n$.

Wenn $\sum_{n \geq n_1} a_n$ konvergent ist, dann ist $\sum_{n \geq n_2} (\ell - \varepsilon)b_n$ auch konvergent (Majorantenkriterium), also ist $\sum_{n \geq n_2} b_n$ konvergent. Wenn $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent ist, dann ist $\sum_{n \geq n_2} (\ell + \varepsilon)b_n$ auch divergent (Minorantenkriterium) und deshalb $\sum_{n \geq n_2} b_n$ auch divergent. □

Was passiert wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$?

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ zeigt dass $\sum_{n \geq n_1} a_n$ „viel kleiner“ als $\sum_{n \geq n_2} b_n$ ist. Da haben die zwei

Reihen nicht unbedingt dieselbe Natur: es ist möglich dass $\sum_{n \geq n_1} a_n$ - konvergent

und $\sum_{n \geq n_2} b_n$ - divergent sind. Aber:

- ist $\sum_{n \geq n_2} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n \geq n_1} a_n$ konvergent;

- ist $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent, so ist $\sum_{n \geq n_2} b_n$ divergent.

Eigentlich, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, dann gilt es $0 < a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ und man kann den Majoranten-, bzw. Minorantenkriterium anwenden.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ zeigt dass $\sum_{n \geq n_1} a_n$ „viel grösser“ als $\sum_{n \geq n_2} b_n$ ist. Da haben die zwei

Reihen nicht unbedingt dieselbe Natur: es ist möglich dass $\sum_{n \geq n_1} a_n$ - divergent und

$\sum_{n \geq n_2} b_n$ - konvergent sind. Aber:

- ist $\sum_{n \geq n_2} b_n$ divergent, so ist $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent;

- ist $\sum_{n \geq n_1} a_n$ konvergent, so ist $\sum_{n \geq n_2} b_n$ konvergent.

Eigentlich, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, dann gilt es $0 < b_n \leq a_n, \forall n \geq n_0$ und man kann den Minoranten-, bzw. Majorantenkriterium anwenden.

Beispiel 10. Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 + 6}$ ist konvergent.

Man vergleicht $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 + 6}$ mit $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ (wir werden sehen warum man genau

die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ gewählt hat). Für $a_n = \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 + 6}$ und $b_n = \frac{1}{n^3}$ berechnet man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 + 6} \cdot \frac{n^3}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n^4 + 4n^3}{5n^5 + 6} =$$

$$\frac{2}{5} \in (0, \infty).$$

Also haben $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 + 6}$ und $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ dieselbe Natur. Als $\frac{1}{n^3} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \right)$ mit $\alpha = 3 \geq 2$) konvergent ist (siehe Beispiel 9.), nach dem Vergleichungskriterium, folgt dass $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 + 6}$ konvergent ist.

Bemerkungen:

1. Warum haben wir $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 + 6}$ genau mit $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ verglichen?

Wenn n gross ist, benehmen sich $2n^2 + 3n + 4$ und $5n^5 + 6$ ungefähr wie $2n^2$, bzw. $5n^5$, also a_n wie $\frac{2n^2}{5n^5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n^3}$.

Im allgemeinen: sollte a_n der Quotient zweier Polynomen sein, da vergleicht man immer mit $\frac{1}{n^\alpha}$ wo α die Differenz der Graden ist:

wenn $a_n = \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_j n^j + d_{j-1} n^{j-1} + \dots + d_1 n + d_0}$, dann vergleicht man mit $b_n = \frac{1}{n^{j-k}}$.

Als man $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnet, erhielt man $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_j n^j + d_{j-1} n^{j-1} + \dots + d_1 n + d_0} \cdot \frac{n^{j-k}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_k n^j + c_{k-1} n^{j-1} + \dots + c_1 n^{j-k+1} + c_0 n^{j-k}}{d_j n^j + d_{j-1} n^{j-1} + \dots + d_1 n + d_0} = \frac{c_k}{d_j} \in (0, \infty)$.

2. Meistens vergleicht man $\sum a_n$ mit Reihen $\sum b_n$ für denen man die Natur schon kennt. Am sonsten hilft das Vergleichungskriterium nur wenn man danach die Natur von $\sum b_n$ noch entscheiden kann.

Die bei der Bemerkung 1. beschriebene Methode wirkt auch in andere ähnliche Fälle:

Beispiel 11. Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{n + 2\sqrt[4]{n^9} + 1}{n^3 + n^4 \sqrt{n} + 3}$ ist konvergent.

Weil $n + 2\sqrt[4]{n^9} + 1 \simeq 2n^{9/4}$ und $n^3 + n^4 \sqrt{n} + 3 \simeq n^{9/2}$ (für n gross), ist

$a_n = \frac{n + 2\sqrt[4]{n^9} + 1}{n^3 + n^4 \sqrt{n} + 3} \simeq \frac{2n^{9/4}}{n^{9/2}} = 2 \cdot \frac{1}{n^{9/4}}$, also mit $\frac{1}{n^{9/4}}$ vergleichbar. Tatsächlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n + 2\sqrt[4]{n^9} + 1}{n^3 + n^4 \sqrt{n} + 3}}{\frac{1}{n^{9/4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2\sqrt[4]{n^9} + 1}{n^3 + n^4 \sqrt{n} + 3} \cdot \frac{n^{9/4}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+9/4} + 2n^{9/4+9/4} + n^{9/4}}{n^3 + n^{9/2} + 1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{13/4} + 2n^{9/2} + n^{9/4}}{n^3 + n^{9/2} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{9/2} \left(\frac{1}{n^{5/4}} + 2 + \frac{1}{n^{9/4}} \right)}{n^{9/2} \left(\frac{1}{n^{3/2}} + 1 + \frac{1}{n^{9/2}} \right)} = 2 \in (0, \infty).$$

Als $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{9/4}}$ konvergent ist $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ mit } \alpha = \frac{9}{4} > 2 \right)$, ist $\sum a_n$ auch konvergent.

Konklusion (Vorteile und Nachteile des Vergleichungskriteriums)

Vorteile:

1. Erlaubt die Natur gewisser Reihen endgültig zu entscheiden.
2. Hat breite Anwendungen.

Nachteile:

1. Man muss die Reihe $\sum b_n$ mit dem man die Reihe $\sum a_n$ vergleicht, „ausraten“.
2. Man kann nur mit solche Reihen vergleichen für denen die Natur schon bekannt ist oder leicht(er) ist zu entscheiden.

3. Quotientenkriterium (oder Kriterium von d'Alembert)

Satz 7. (Quotientenkriterium, QK)

Sei $\sum_{n \geq n_1} a_n$ eine Reihe mit $a_n > 0, \forall n \geq n_1$.

Wenn es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ gibt, dann:

a) ist $\ell < 1$ so ist die Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ konvergent;

b) ist $\ell > 1$ so ist die Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent;

c) ist $\ell = 1$ so kann man die Natur der Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ mit dieses Kriterium nicht entscheiden.

(Die Reihe kann konvergent oder divergent sein.)

Beweis: a) Sei $\varepsilon > 0$ so dass $\ell - \varepsilon > 0$ und $\ell + \varepsilon < 1$.

Dann gibt es ein $N_0 = N_0(\varepsilon)$ so dass $0 < \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon, \forall n \geq N_0$.

Sei $n \geq N_0$. Dann hat man:



Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783)

$$\begin{aligned}
0 < \ell - \varepsilon < \frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} < \ell + \varepsilon \\
0 < \ell - \varepsilon < \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} < \ell + \varepsilon \\
&\vdots \\
0 < \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \ell + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Multipliziert man diese $n - N_0$ Ungleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned}
0 < (\ell - \varepsilon)^{n-N_0} < \frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} \cdot \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} \cdot \frac{a_{N_0+3}}{a_{N_0+2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} < (\ell + \varepsilon)^{n-N_0}, \text{ also} \\
0 < (\ell - \varepsilon)^{n-N_0} < \frac{a_n}{a_{N_0}} < (\ell + \varepsilon)^{n-N_0}.
\end{aligned}$$

Es folgt dass $a_n < b_n = \frac{a_{N_0}}{(\ell + \varepsilon)^{N_0}} \cdot (\ell + \varepsilon)^n$, $\forall n \geq N_0$. Die Reihe $\sum_{n \geq N_0} b_n$ ist konvergent (siehe Beispiel 1. mit $b = \ell + \varepsilon < 1$), also, laut das Majorantenkriterium ist die Reihe $\sum_{n \geq N_0} a_n$ konvergent also $\sum_{n \geq n_1} a_n$ auch konvergent.

b) Es sei $\varepsilon > 0$ so dass $\ell - \varepsilon > 1$. Genau wie bei a), gibt es ein $N_0 = N_0(\varepsilon)$ so dass

$$0 < (\ell - \varepsilon)^{n-N_0} < \frac{a_n}{a_{N_0}} < (\ell + \varepsilon)^{n-N_0}, \quad \forall n \geq N_0.$$

Es folgt davon dass $b_n = \frac{a_{N_0}}{(\ell - \varepsilon)^{N_0}} \cdot (\ell - \varepsilon)^n < a_n$. Aber $\sum_{n \geq N_0} (\ell - \varepsilon)^n$ ist divergent

(Beispiel 1. mit $b = \ell - \varepsilon > 1$), also, laut das Minorantenkriterium, ist $\sum_{n \geq N_0} a_n$ divergent und deshalb auch $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent.

c) Wir werden durch zwei Beispiele beweisen dass es tatsächlich möglich ist dass

1) $\sum a_n$ konvergent ist

2) $\sum a_n$ divergent ist

wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

1) Es sei $a_n = \frac{1}{n^2}$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1$ und $\sum a_n$ ist konvergent.

2) Es sei $a_n = \frac{1}{n}$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ und $\sum a_n$ ist divergent. \square

Beispiel 12. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$ ist konvergent weil:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \stackrel{\text{QK}}{\implies}$$

$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$ - konvergent.

Beispiel 13. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$ ist divergent weil:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{2^n \cdot n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{2n^n} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1 \stackrel{\text{QK}}{\implies} \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{2^n \cdot n!} - \text{divergent.}$$

Konklusion (Vorteile und Nachteile des Quotientenkriteriums)

Vorteile:

1. Es lässt sich sehr leicht anwenden: Imagination spielt keine Rolle.
2. Es eignet sich sehr wohl für die Fälle wenn in a_n Faktoren wie $n!$ oder a^n vorkommen. Polynomiale Faktoren stören nicht, helfen aber auch nicht.

Nachteile:

1. Oftens wird der berechnete Grenzwert $\ell = 1$ sein. Da kann man den Quotientenkriterium nicht anwenden. Dies ist immer der Fall wenn es um Reihen der Form $\frac{P(n)}{Q(n)}$ geht, wo P, Q Polynomen sind. Da wird ℓ immer 1 sein.

Jedoch, wie es wir später sehen werden, hat die Untersuchung der Konvergenz mit den Quotientenkriterium eine natürliche Fortsetzung, nämlich mit das Kriterium von Raabe.

4. Wurzelkriterium (oder Kriterium von d'Alembert)

Satz 7. (Wurzelkriterium, WK)

Sei $\sum_{n \geq n_1} a_n$ eine Reihe mit $a_n > 0, \forall n \geq n_1$.

Wenn es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ gibt, dann:

a) ist $\ell < 1$ so ist die Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ konvergent;

b) ist $\ell > 1$ so ist die Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent;

c) ist $\ell = 1$ so kann man die Natur der Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ mit dieses Kriterium nicht entscheiden.

(Die Reihe kann konvergent oder divergent sein.)



Baron Augustin-Louis
Cauchy (1789 – 1857)

Beweis: a) Sei $\varepsilon > 0$ so dass $\ell - \varepsilon > 0$ und $\ell + \varepsilon < 1$.

Dann gibt es ein $N_0 = N_0(\varepsilon)$ so dass $0 < \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon, \forall n \geq N_0$.

Sei $n \geq N_0$. Dann hat man:

$$a_n < b_n = (\ell + \varepsilon)^n \quad \forall n \geq N_0.$$

Die Reihe $\sum_{n \geq N_0} b_n$ ist konvergent (siehe Beispiel 1. mit $b = \ell + \varepsilon < 1$), also, laut das

Majorantenkriterium ist die Reihe $\sum_{n \geq N_0} a_n$ konvergent also $\sum_{n \geq n_1} a_n$ auch konvergent.

b) Es sei $\varepsilon > 0$ so dass $\ell - \varepsilon > 1$. Genau wie bei a), gibt es ein $N_0 = N_0(\varepsilon)$ so dass

$$0 < b_n = (\ell - \varepsilon)^n < a_n, \quad \forall n \geq N_0.$$

Aber $\sum_{n \geq N_0} (\ell - \varepsilon)^n$ ist divergent (Beispiel 1. mit $b = \ell - \varepsilon > 1$), also, laut das

Minorantenkriterium, ist $\sum_{n \geq N_0} a_n$ divergent und deshalb auch $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent.

c) Für $a_n = \frac{1}{n}$, bzw. $a_n = \frac{1}{n^2}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ wenn $\sum \frac{1}{n}$ konvergent, bzw. $\sum \frac{1}{n^2}$ divergent ist. □

Beispiel 14. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ist konvergent weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Bemerkung: Für die obige Reihe könnte man auch das QK anwenden aber die Berechnung des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ist schwierig. Das WK anzuwenden war viel bequemer.

Bemerkung (Die Verbindung zwischen QK und WK)

Liefert bei einer Reihe das Quotientenkriterium eine Entscheidung (das heisst $\ell < 1$ im Falle der Konvergenz bzw. $\ell > 1$ im Falle der Divergenz) so liefert auch das Wurzelkriterium dieselbe Entscheidung (das heisst $\ell < 1$ im Falle der Konvergenz bzw. $\ell > 1$ im Falle der Divergenz). Dies ist von den **Cauchy-d'Alembert Satz** festgestellt:

Satz von Cauchy-d'Alembert: Wenn $a_n > 0, \forall n$ und es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ gibt dann gibt es auch den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

Folgerung: Wenn das QK die Natur der Reihe $\sum a_n$ nicht entscheiden kann weil

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, dann kann das WK die Natur der Reihe auch nicht entscheiden denn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Es ist jedoch möglich dass es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nicht gibt, und deshalb das QK nicht anwendbar ist, und der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1$ doch gibt und das WK anwendbar ist. Es ist der Fall im folgenden

Beispiel 15. Sind die Reihenglieder $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$ und $a_{2n+1} = \frac{4}{2^{2n+1}}$ dann ist $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2$ und $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{1}{8}$. Hier gibt es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nicht, deshalb ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

Das Wurzelkriterium liefert hier aber eine Entscheidung weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{2} \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz von $\sum a_n$. Das Wurzelkriterium ist also echt schärfer als das Quotientenkriterium.

Beispiel 16. Die Reihe $\sum \frac{n}{2^n}$ ist konvergent.

mit das Quotientenkriterium: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} = \ell$. Als $\ell < 1$, es folgt dass $\sum a_n$ konvergent ist.

mit das Wurzelkriterium: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} = \ell$.

Als $\ell < 1$, es folgt dass $\sum a_n$ konvergent ist.

Wie es der Satz von Cauchy-d'Alembert sagt, Falls es der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gibt, da sind $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ gleich. In diesem Beispiel sind beide Grenzwerte $\frac{1}{2}$.

Konklusion (Vorteile und Nachteile des Wurzelkriteriums)

Vorteile:

1. Wie das QK, lässt sich das WK direkt anwenden: Imagination spielt keine Rolle.
2. Es eignet sich sehr wohl für die Fälle wenn a_n die Form $a_n = (b_n)^n$ hat. Da ist $\sqrt[n]{a_n} = b_n$ und das macht $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ leicht berechnbar.

Nachteile:

1. Wie bei das QK, often wird der berechnete Grenzwert $\ell = 1$ sein. Da kann man den Wurzelkriterium nicht anwenden. Dies ist immer der Fall wenn es um Reihen der Form $\frac{P(n)}{Q(n)}$ geht, wo P, Q Polynomen sind. Da wird ℓ immer 1 sein.
2. Often ist der Grenzwert von $\sqrt[n]{a_n}$ nicht leicht zu berechnen. Wenn es nicht klar ist das dieser Grenzwert leichter zu berechnen ist als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dann empfehlen wir das QK anstatt das WK.

5. Kondensationskriterium (oder Cauchyscher Verdichtungskriterium)

Satz 8. (Kondensationskriterium)

Ist $(a_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 1} a_n$ dann und genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n \geq 0} 2^n \cdot a_{2^n}$ konvergiert.

(Mit andere Wörter, haben die Reihen $\sum_{n \geq 1} a_n$ und $\sum_{n \geq 0} 2^n \cdot a_{2^n}$ dieselbe Natur.)

Beweis: Als die Folge der Partialsummen steigend ist (weil $s_{n+1} = s_n + a_n > s_n$), ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent wenn und genau wenn die Folge der Partialsummen

$(s_n)_{n \geq 1}$ auch beschränkt ist. Es gilt einerseits:

$$s_{2^{n+1}} - 1 = \underbrace{a_1}_{=1 \cdot a_1} + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2 \cdot a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leq 4 \cdot a_4} + \dots + \underbrace{a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}-1}}_{\leq 2^n \cdot a_{2^n}} \leq \sum_{m=0}^n 2^m \cdot a_{2^m}.$$

Wenn die Reihe $\sum_{n \geq 0} 2^n \cdot a_{2^n}$ konvergent ist, dann ist die Folge seiner Partialsummen,

$$(t_n)_{n \geq 0}, t_n = \sum_{m=0}^n 2^m \cdot a_{2^m} \text{ beschränkt.}$$

Von der obigen Berechnung folgt, dass die Folge $(s_{2^{n+1}-1})_{n \geq 0}$ auch beschränkt ist. Aus $0 \leq s_n \leq s_{2^{n+1}-1} \leq M$, folgt dass die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \geq 1}$ beschränkt ist. Als sie auch steigend ist, ist sie konvergent, also ist die Reihe $\sum_{n \geq 1} a_n$ konvergent.

Umgekehrt gilt:

$$s_{2^n} = a_1 + \underbrace{a_2}_{=1 \cdot a_2} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2 \cdot a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq 4 \cdot a_8} + \dots + \underbrace{a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^n}}_{\geq 2^{n-1} \cdot a_{2^n}} \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=0}^n 2^m \cdot a_{2^m} = \frac{1}{2} \cdot t_n.$$

Ist die Reihe $\sum_{m \geq 0} 2^m \cdot a_{2^m}$ divergent, so ist die Folge seiner Partialsummen unbeschränkt und deshalb $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$. Es folgt dass $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$, also ist in diesem

Fall die Reihe $\sum_{n \geq 1} a_n$ divergent. □

Dieser Satz sagt dass Falls $a_n > 0$ und $(a_n)_{n \geq 1}$ fallend ist dann ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \geq 1} a_n$ nur von wenige Glieder der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ entschieden, nämlich von a_{2^m} , $m \geq 0$. Aber, während es nur wenige Glieder zählen, haben diese Glieder eine je grössere Gewicht (a_{2^n} wird 2^n mal gezählt).

Beispiel 17. (Harmonische Reihen)

Wir haben schon erwähnt dass die harmonische Reihen $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, sehr wichtig

sind indem man sie, zusammen mit den Vergleichskriterium anwenden kann um die Natur einer Reihe zu bestimmen. Jetzt sind wir in der Lage die Natur dieser harmonischen Reihen endgültig zu bestimmen:

Laut das Kondensationskriteriums, haben die Reihen $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ und $\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}$ dieselbe Natur. Aber $\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n \geq 0} (2^{1-\alpha})^n$ ist konvergent wenn und genau wenn $-1 < 2^{1-\alpha} < 1$, also wenn und genau wenn $\alpha > 1$.

Es ist wichtig sich zu merken dass:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ ist konvergent wenn } \alpha > 1$$

$$\text{divergent wenn } \alpha \leq 1.$$

Beispiel 18. Bestimme die Natur der Reihe $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Man kann versuchen die Natur dieser Reihe mit das Vergleichungskriterium bestimmen. Als es für alle $\alpha > 1$ ein N_0 gibt so dass $\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq N_0$, man kann es sehen dass die Vergleichung der Reihe $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ mit eine harmonische Reihe nichts gibt. Also ist das Vergleichungskriterium nicht anwendbar.

Hier hilft das Kondensationskriterium:

Als n und $\ln n$ steigende un positive Folgen sind, ist $\frac{1}{n \ln n}$ fallend. Dann hat

$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ dieselbe Natur wie $\sum_{n \geq 1} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. Als $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt dass $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ auch divergent ist.

Konklusion (Vorteile und Nachteile des Kondensationskriteriums)

Vorteile:

Dieses Kriterium ist sehr leicht anwendbar. Es ist besonderst geeignet wenn $\log n$ ($\ln n$, $\lg n$) vorkommt denn $\log n$ wird durch die Substitution $n \mapsto 2^n$ in $n \log 2$ verwandelt (wie es der Fall war im obigen Beispiel).

Nachteile:

Manchmal hat die zweite Reihe ein sehr komplizierten Ausdruck und wenn wir dieses Kriterium anwenden, machen wir keinen Fortschritt.

6. Kriterium von Raabe (Raabesche Kriterium)

Satz 6. (Kriterium von Raabe)

Sei $\sum_{n \geq n_1} a_n$ eine Reihe mit $a_n > 0, \forall n \geq n_1$.

Wenn es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \ell$ gibt, dann:

a) ist $\ell < 1$ so ist die Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ divergent;

b) ist $\ell > 1$ so ist die Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ konvergent;

c) ist $\ell = 1$ so kann man die Natur der Reihe $\sum_{n \geq n_1} a_n$ mit dieses Kriterium nicht entscheiden.

(Die Reihe kann konvergent oder divergent sein.)

Beweis: a) Falls $\ell < 1$, es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq \frac{1 + \ell}{2} < 1, \forall n \geq n_0$.

Dann: $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \leq \frac{\ell - 1}{2} < 0$, also $na_n - (n + 1)a_{n+1} < 0, \forall n \geq n_0$. Es folgt dass $(na_n)_{n \geq n_0}$ eine steigende Folge ist, also $na_n \geq n_0 a_{n_0}, \forall n \geq n_0$. Von $a_n \geq n_0 a_{n_0} \cdot \frac{1}{n}$ und das Vergleichungskriterium folgt, dass $\sum_{n \geq n_0} a_n$ divergent ist (weil $\sum \frac{1}{n}$ divergent ist).

b) Falls $\ell > 1$, es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \frac{1 + \ell}{2} > 1, \forall n \geq n_0 \quad (*).$$

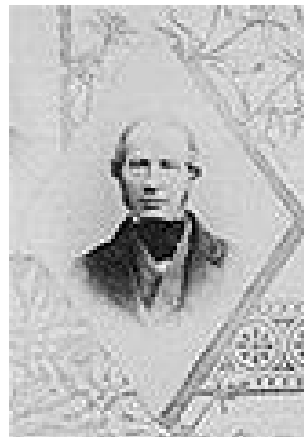
Dann folgt, wie im obigen Fall, dass $na_n - (n + 1)a_{n+1} > 0, \forall n \geq n_0$, also dass $(na_n)_{n \geq n_0}$ eine fallende Folge ist. Als sie auch beschränkt ist, so folgt, dass $(na_n)_{n \geq n_0}$ eine konvergente Folge ist.

Aus (*) folgt, dass $\frac{\ell - 1}{2} \cdot a_{n+1} \leq na_n - (n + 1)a_{n+1} = b_n$. Die („teleskopische“) Reihe

$\sum b_n$ ist konvergent weil die Folge seiner Partialsummen ist: $s_n = (1 \cdot a_1 - 2 \cdot a_2) +$

$(2 \cdot a_2 - 3 \cdot a_3) + \dots + ((n - 1)a_{n-1} - na_n) = a_1 - na_n$, also eine konvergente Folge.

Laut das Vergleichungskriterium, als $a_n \leq b_n$, folgt dass $\sum a_n$ eine konvergente Reihe ist.



Joseph Ludwig Raabe
(1801 – 1859)

c) Zum Beispiel, für die divergente Reihe $\sum \frac{1}{n}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

.....serie cvg care nu iese cu raabe..... □

Bemerkungen:

1. Dieser Kriterium ist eine Ergänzung des Quotientenkriteriums:

wenn dies keinen Antwort liefert, also wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (das bedeutet auch dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$), ist der Grenzwert den man berechnen muss, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$, ein unbestimmter Ausdruck der Art $\infty \cdot 0$.

Falls das QK wirkt, dann wirkt auch das Raabesche Kriterium:

• wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{L} - 1 < 0$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \infty \cdot \left(\frac{1}{L} - 1 \right) = -\infty < 1, \text{ also ist die Reihe divergent.}$$

• wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{L} - 1 > 0$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \infty \cdot \left(\frac{1}{L} - 1 \right) = \infty > 1, \text{ also ist die Reihe konvergent.}$$

2. Dieses Kriterium gibt eine natürliche Fortsetzung des Quotientenkriteriums: die Schritte sind:

I. erstens berechnet man $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

II. dann berechnet man $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; wenn $L \neq 1$ gibt das QK eine Antwort.

III. Falls $L = 1$, benützt man die Berechnungen vom ersten Schritt um

$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$, und danach seinen Grenzwert zu berechnen.

Beispiel 19. Bestimme die Natur der Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$.

Es sei $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$. Dann ist $a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)}$.

Die Schritte:

I. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$

II. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{2} = 1$, also bringt das QK keine Entscheidung;

III. $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$ also ist die Reihe divergent.

Bemerkung 3. Alles ist umgekehrt bei dem Raabeschen Kriterium in Bezug auf das QK:

anstatt $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ haben wir hier $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ und die Reihe ist nicht konvergent wenn $\ell < 1$ wie es bei dem QK der Fall war, sondern im Gegenteil, wenn $\ell > 1$.

Man kann eine andere, äquivalente Form, des Raabe Kriterium geben:

Wenn es den Grenzwert $\ell' = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ gibt, dann:

- wenn $\ell' < -1$ dann ist die Reihe konvergent
- wenn $\ell' > -1$ dann ist die Reihe divergent
- der Fall $\ell' = -1$ ist unentschieden.

Bemerkung 4. Falls es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ nicht gibt, da kann man dieses Kriterium nicht anwenden.

Beispiel 20. Man kann die Natur von $\sum \frac{1}{n^2}$ auch mit dem Kriterium von Raabe entscheiden:

sei $a_n = \frac{1}{n^2}$; dann ist $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \rightarrow 1$.

Das QK liefert keine Antwort, aber man setzt mit dem Raabe Kriterium fort:

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$, $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{2n+1}{n^2}$ also $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = 2 > 1$ also ist die Reihe konvergent.

Beispiel 21. Bestimme die Natur der Reihe $\sum \frac{4^n}{C_{2n}^n}$.

Sei $a_n = \frac{4^n}{C_{2n}^n} = \frac{4^n}{\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}} = \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$. Dann ist $a_{n+1} = \frac{4^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$ und

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2n+2}{2n+1} \rightarrow 1$, also gibt

das QK keine Antwort.

Man berechnet $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{2n+1}{2n+2} - 1 \right) = n \cdot \frac{-1}{2n+2} = \frac{-n}{2n+2} \rightarrow -\frac{1}{2} < 1$

also ist die Reihe divergent.

Dies könnte man schon früher feststellen: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, also ist $(a_n)_n$ eine steigende Folge. Als $a_n > 0$, es ist unmöglich dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Es folgt dass die Reihe divergent ist.

REIHEN MIT NICHT NUR POSITIVE GLIEDER

Wir haben gesehen, dass, um die Natur einer positive Reihe zu entscheiden, uns eine Menge von Kriterien zur Verfügung stehen.

Was können wir machen um die Natur einer Reihe $\sum a_n$ zu studieren wenn nicht alle a_n positiv sind.

- Der einfachste Fall ist wenn es nur endlich viele a_n negativ oder Null sind, also wenn $a_n > 0, \forall n \geq n_0$. Dann kann man für die Reihe $\sum_{n \geq n_0} a_n$ alle Kriterien für

positive Reihen benutzen um die Natur von $\sum a_n$ zu bestimmen.

- Sehr einfach ist auch der Fall wenn (fast) alle Glieder negativ sind, denn in diesem Fall können wir $\sum a_n = -\sum |a_n|$ schreiben und die Konvergenz von $\sum |a_n|$ mit die bekannten Kriterien studieren.

- Es bleiben zu studieren die Reihen die unendlich viele positive und unendlich viele negative Glieder haben. Ein wichtiger Fall von solche Reihen sind die:

Alternierende Reihen

Definition 3. (Alternierende Reihe)

Eine Reihe $\sum a_n$ heisst alternierende Reihe, wenn die Folgenglieder a_n abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben.

Beispiele: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$; $\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + \ln n}$; $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n\pi)}{1 + \sqrt{n}}$

Alle diese Folgen haben die Form $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n b_n$ (oder $\sum_{n \geq n_0} (-1)^{n+1} b_n$), wo $b_n > 0$,

$\forall n$. Für das dritte Beispiel ist dies vielleicht nicht so leicht bemerkbar, aber $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Für solche Reihen ist das Leibniz-Kriterium sehr nützlich:

Satz 7. (Kriterium von Leibniz)

Sei $(b_n)_{n \geq n_0}$ eine monoton fallende Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n b_n$.

Beweis: Sei zunächst $n_0 = 0$. Der allgemeine Fall, mit $n_0 \in \mathbb{N}$, kann durch das Ummumerierung der Glieder der Reihe und, wenn nötig, Multiplikation durch -1 auf dem Fall $n_0 = 0$ zurückgeführt werden. Wir betrachten die Teilfolgen $(s_{2n})_{n \geq 0}$ und $(s_{2n+1})_{n \geq 0}$ der Folge der Partialsummen.

Als $b_{2k+1} \leq b_{2k} \leq b_{2k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, folgt, dass

$$s_{2k} = s_{2k-2} + (-1)^{2k-1} b_{2k-1} + (-1)^{2k} b_{2k} =$$

$$s_{2k-2} - (b_{2k-1} - b_{2k}) \leq s_{2k-2} \quad \text{und}$$

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + (-1)^{2k} b_{2k} + (-1)^{2k+1} b_{2k+1} =$$

$$s_{2k-1} + (b_{2k} - b_{2k+1}) \geq s_{2k-1}.$$

Also sind $(s_{2n})_{n \geq 0}$ fallend und $(s_{2n+1})_{n \geq 0}$ steigend.

Es gilt $s_1 \leq s_{2k-1} = s_{2k} - b_{2k} \leq s_{2k} \leq s_0$, also sind die zwei Teilfolgen $(s_{2n})_{n \geq 0}$ und $(s_{2n+1})_{n \geq 0}$ beschränkt, also konvergent. Es seien $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$ und $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$,

$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Als $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$, folgt, dass $\ell_1 = \ell_2 + 0$, also

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$. Dann gibt es $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ell_1 = \ell_2$, also ist die Reihe konvergent. \square

Beispiel 22. Die *alternierende harmonische Reihe*, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist, nach dem

Leibniz-Kriterium, konvergent. Ihr Grenzwert ist, wie sich später herausstellen wird, $\ln 2$.

Absolut konvergente Reihen¹

Definition 4. Eine Reihe $\sum_{n \geq n_0} a_n$ heisst absolut konvergent falls die Reihe $\sum_{n \geq n_0} |a_n|$ konvergent ist.

Also eine Reihe ist absolut konvergent falls die Reihe der Absolutwerte konvergent ist.

Beispiel 23. Der Beispiel 1. zeigt, dass die geometrische Reihe $\sum_{n \geq 0} b^n$ absolut konvergent ist für $b \in (-1, 1)$.



Gottfried Wilhelm
Leibniz (1646 – 1716)

¹ Dieser Begriff, sowie der zugehöriger Satz, wirkt auch für Reihen mit Glieder $a_n \in \mathbb{C}$.

Satz 8. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent und es gilt

$$\left| \sum_{n \geq n_0} a_n \right| \leq \sum_{n \geq n_0} |a_n|.$$

Beweis: Sei $\sum_{n \geq n_0} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann gibt es, nach Satz 4.,

zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq N_0$. Dann

gilt auch $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| = \left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq N_0$, also

erfüllt $\sum_{n \geq n_0} a_n$ das Cauchy-Kriterium. Nach Satz 4. ist sie dann konvergent. Da

$$\left| \sum_{k=n_0}^n a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^n |a_k|, \text{ mit Grenzübergang } n \rightarrow \infty \text{ folgt dass } \left| \sum_{n \geq n_0} a_n \right| \leq \sum_{n \geq n_0} |a_n|. \square$$

Bemerkung: Die Umkehrung von Satz 8. gilt nicht: die alternierende harmonische Reihe ist konvergent (s. Beispiel 22.) aber nicht absolut konvergent (die harmonische Reihe ist divergent). Solche Reihen, die konvergent sind, aber nicht absolut konvergent sind heißen semikonvergente Reihen.

Bemerkung: Der obige Satz sagt: wenn $\sum |a_n|$ konvergent ist, dann ist $\sum a_n$ auch konvergent.

Deshalb, um die Konvergenz einer Reihe zu beweisen ist es genügend seine absolute Konvergenz zu beweisen. Der Vorteil ist, dass, in Gegenteil mit die gegebene Reihe, für die Reihe der Absolutwerte man alle Kriterien anwenden kann, denn die Reihe der Absolutwerte ist eine Reihe mit *positive* Glieder.

Für alternierende Reihe ist das Leibniz test besser geeignet als der obige Satz. Zum Beispiel Leibniz wirkt sehr einfach für $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\forall \alpha > 0$ (es sagt diese Reihen sind alle konvergent). Aber diese Reihen sind absolut konvergent (und deshalb, nach dem obigen Satz auch konvergent) nur für $\alpha > 1$. Für $\alpha \in (0, 1)$ beantwortet der obige Satz die Frage der Konvergenz der Reihe nicht (nur das Leibniz test tut es).

Beispiel 24. Die Reihe $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ ist konvergent.

Weil der Vorzeichen von $\cos n$ schwer zu kontrollieren ist (es ändert sich sehr oft), ist die beste idee zu beweisen dass diese Reihe absolut konvergent ist. Tatsächlich, weil $\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ (weil $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x$) und $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, so folgt nach das Majorantenkriterium, dass $\sum \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ auch konvergent ist also $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ absolut konvergent ist. Laut des Satzes 8., ist dann $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ auch konvergent.

Kleine Zeilen über grosse Mathematiker

(Selection aus <http://de.wikipedia.org>)

1. d'Alembert

Jean-Baptiste le Rond genannt d'Alembert (Paris, 16 November 1717 – Paris, 29 Oktober 1783) war einer der bedeutendsten Mathematiker und Physiker des 18ten Jahrhunderts und ein Philosoph der Aufklärung. Gemeinsam mit Denis Diderot war er der Herausgeber der berühmten *Encyclopédie*.

D'Alembert, der ausser der Ehe geboren war, wurde von seine Mutter an die Kapelle St. Jean-le-Rond, neben den Nordturm der Notre-Dame Kirche in Paris ausgesetzt. Später wurde er adoptiert. Sein Vater ermöglichte ihm jedoch eine umfassende Erziehung.

D'Alembert studierte erst Rechtswissenschaft (er bekam Rechtsanwalt), dann Medizin, ehe er sich endgültig autodidaktisch der Mathematik und Physik zuwandte. D'Alembert interessierte sich unter anderem auch für die Musik. Er schrieb einige sehr wichtige Werke darüber. Seine Beiträge zur Encyclopédie erschien zwischen 1751 und 1780. Er schrieb den „*Discours préliminaire*“ im ersten Band, eine Art „Manifest der Aufklärung“, und verfasste über 1.700 Beiträge. Sein Einfluss über das Denken der Menschheit, seine Rolle in die Entwicklung der europäische Gesellschaft und in die Veränderung der Mentalitäten sind riesig. D'Alembert war auch ein glänzender Tacitus-Übersetzer. Er war Mitglied einer Pariser Freimaurerloge, Freund von Voltaire und führte Briefverkehr auch mit „aufgeklärten Herrschern“ wie Friedrich II. von Preussen oder die russischen Zarin Katharina die Grosse.

Nach ihm ist das D'Alembertsche Prinzip der Mechanik benannt. D'Alembert arbeitete auch auf dem Gebiet der Konvergenz von Reihen und fand das Quotientenkriterium, das nach ihm auch D'Alembert-Kriterium genannt wird. In „*Traité de dynamique*“ erscheint auch der Satz von d'Alembert (auch Satz von Gauss-d'Alembert genannt). Dieser Satz behauptet dass ein Polynome n -ten Grad mit komplexe Koeffizienten hat genau n , nicht umbedingt distinkte, Würzel in \mathbb{C} . Dieser Satz wird nur in den 19ten Jahrhundert von Carl Friedrich Gauss bewiesen.

2. Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) war ein französischer Mathematiker. Als ein Pionier der Analysis entwickelte er die von Gottfried Wilhelm Leibniz und Sir Isaac Newton aufgestellten Grundlagen weiter, wobei er die fundamentalen Aussagen auch formal bewies. Insbesondere in der Funktionentheorie stammen viele zentrale Sätze von ihm. Cauchys Vater, Louis-François, war ein streng katholischer, belesener Royalist. Zum Zeitpunkt der Erstürmung der Bastille am 14. Juli 1789 war er die rechte Hand des Lieutenant Général der Polizei von Paris. Augustin Louis wurde mitten in die französische Revolution hinein geboren. Louis-François

nahm aus Angst vor Denunziation seine Familie mit in ihr Landhaus nach Arcueil, 5km südlich von Paris, wo sie in Armut und Hunger lebten. Der kleine Augustin Louis erhielt von seinem Vater grundlegenden Unterricht. Nach dem Ende der Terrorherrschaft kehrte die Familie nach Paris zurück, Louis-François machte wieder Karriere und wurde schliesslich nach Napoléons Staatsstreich Generalsekretär des Senats. Das führte zu einer engen Bekanntschaft mit dem damaligen Innenminister Pierre-Simon Laplace (der auch in Arcueil lebte) und dem Senator Joseph-Louis Lagrange, zwei bedeutenden Mathematikern. Sie erkannten bereits früh das mathematische Talent des Sohns, so soll etwa Lagrange gesagt haben: „Eines Tages wird dieser Junge uns simple Geometer alle übertreffen.“

Auf Anraten von Lagrange lernte Cauchy zunächst klassische Sprachen, was ihn auf eine weitere Mathematikausbildung vorbereiten sollte. 1805 absolvierte er als Zweitbester die Aufnahmeprüfung zur *École Polytechnique*, wo er zwischen andere Ampère als Lehrer hatte. Als junge Ingenieur erhielt Cauchy einen Auftrag beim Bau des Hafens Port Napoléon in Cherbourg. Später, in 1815, bekam er Professor an der *École Polytechnique*. Als Mitglied der Académie (seit 1815) war eine von Cauchys Pflichten die Begutachtung von eingesandten wissenschaftlichen Artikeln. Dieser Arbeit widmete er viel seiner Zeit, allerdings nicht unbedingt zur Freude der Schreiber. So schrieb *Abel*: „Cauchy ist verrückt und man kann nichts dagegen tun. Allerdings ist er zur Zeit der einzige, der weiss, wie man Mathematik machen sollte.“ Als Lehrender ging Cauchy mit grossem Eifer zur Sache. Er legte grossen Wert auf die Genauigkeit der Definitionen und führte viel neuen Stoff ein, wie seine neue Definition der Ableitung, die auf einem Grenzwert beruhte und nicht auf dem Infinitesimalkalkül. Dies gefiel den Studenten nicht, denen Cauchys Vorlesungen zu abstrakt und zu wenig ingenieurorientiert waren. Seine Vorstellungen von der Lehre schrieb er in einigen Büchern nieder. Diese sind Meilensteine der Analysis. Im Juli 1830 wurde der reaktionäre König Karl X. gestürzt. Kurz darauf verlor Cauchy seine Posten. Bereits 1833 verliess er die Stadt, um sich Karl X. auf dem Hradschin in Prag anzuschliessen, und wurde Hauslehrer dessen Enkels Heinrich, des Herzogs von Bordeaux. Cauchy wurde aufgrund seiner wissenschaftlichen Meriten den Prinzen in Mathematik und den Naturwissenschaften, insbesondere Chemie und Physik, zu unterrichten. Er nahm diese Aufgabe sehr ernst, so wie er auch den Anspruch des Prinzen auf den Thron lebhaft unterstützte. So bereitete er sich gewissenhaft auf die Unterrichtsstunden vor und betrieb in diesen Jahren so gut wie keine Forschung. Es zeigte sich auch hier, wie schon in Paris, sein mangelndes Talent als Lehrer. Der Prinz zeigte keinerlei Interesse oder Begabung für Mathematik und er verstand von dem, was Cauchy ihm erzählte, herzlich wenig. Bis zu seinem 18. Lebensjahr, als seine Ausbildung beendet wurde, entwickelte er eine ausgiebige Abneigung gegen Mathematik. Cauchy zeigte als Lehrer keinerlei Autorität, und der verwöhnte Bourbonenprinz tanzte ihm nach Belieben auf der Nase rum und trieb derbe Spässe mit ihm.

In der Theorie der Folgen und Reihen hat Cauchy viele wichtige Kriterien für deren Konvergenz entwickelt. Von grundlegender Bedeutung für die Theorie der

Folgen und Reihen ist die Cauchy-Folge. Cauchy benutzte im *Cours d'analyse* das Cauchy-kriterium für Reihen, das analog auf Folgen angewandt werden kann, um ihre Konvergenz zu zeigen. Einen echten Beweis dafür, dass Cauchyfolgen in \mathbb{R} konvergieren, gab er allerdings nicht.

Cauchy zeigte die Konvergenz der geometrischen Reihe und leitete daraus das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium ab.

Der Grenzwertsatz von Cauchy besagt schliesslich, dass das arithmetische Mittel der Elemente einer konvergenten Folge gegen den Grenzwert dieser Folge strebt. Der cauchysche Verdichtungssatz gibt ein Kriterium an, wie ausgewählte Glieder einer Reihe (daher verdichtet) als Kriterium für eine streng monoton fallende Reihe verwendet werden können. Cauchy hat ausser die Cauchy-Hadamard Formel noch weitere Erkenntnisse über die Potenzreihen geliefert. Vor allem bewies er erstmals mit formaler Strenge das Taylorsche Theorem und entwickelte in diesem Zusammenhang das Cauchysche Restglied einer Taylorreihe.

Als erster bewies er streng die Konvergenz der schon von Leonhard Euler untersuchten Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, deren Grenzwert die eulersche Zahl e ist.

Cauchy war faktisch bis etwa 1840 der einzige, der sich mit Funktionentheorie beschäftigte. Dementsprechend gross ist sein Beitrag zu diesem Gebiet: Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, des cauchyschen Integralsatzes für das Rechteck, den Residuensatz für den Fall der Integration über ein Rechteck. Alle holomorphen Funktionen können mit Hilfe der Integralformel von Cauchy beliebig oft differenziert werden. Cauchy untersuchte ebenfalls gewöhnliche Differentialgleichungen und gab für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten einen Lösungsweg, basierend auf der Fourier-Transformation und seinem Residuensatz. (Sie werden diese Sätze im zweiten Semester studieren!). Nach ihm ist das Cauchy-Problem benannt, das sind Anfangswertprobleme, bei denen die Lösungen auf dem kompletten Raum gesucht werden.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gibt an, dass der Absolutwert des Skalarproduktes zweier Vektoren nie grösser als das Produkt der jeweiligen Vektornormen ist.

3. Raabe

Joseph Ludwig Raabe (1801 – 1859) war ein Schweizer Mathematiker. In die Geschichte der Mathematik gebührt Raabe nicht ein sehr wichtiger Platz. Raabe wurde nur durch das nach ihm benannte Kriterium von Raabe bekannt.

Raabes Eltern waren recht arm. Daher musste Raabe sich schon früh seinen Lebensunterhalt verdienen, indem er Privatunterricht erteilte. 1820 begann er daneben in Wien am Polytechnikum das Mathematikstudium. Im Herbst 1831 zog er nach Zürich. Dort habilitierte er sich 1833 und wurde anschliessend Gymnasiallehrer und Privatdozent an der Universität. 1855 erhielt er einen Lehrstuhl am neu gegründeten eidgenössischen Polytechnikum.

4. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) war ein deutscher Philosoph und Wissenschaftler, (Mathematiker, Physiker und Historiker), Diplomat und Politiker. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit und war einer der bedeutendsten Philosophen des ausgehenden 17. und beginnenden 18. Jahrhunderts sowie einer der wichtigsten Vordenker der Aufklärung. Leibniz sagte über sich selbst: „Beim Erwachen hatte ich schon so viele Einfälle, dass der Tag nicht ausreichte, um sie niederzuschreiben.“

Leibniz wurde am 1. Juli 1646 in Leipzig geboren. Sein Vater war Jurist und Professor für Ethik und seine Mutter Catharina war die Tochter des Leipziger Professors und Rechtswissenschaftlers Wilhelm Schmuck. Der achtjährige Leibniz erlernte anhand der umfangreichen väterlichen Bibliothek autodidaktisch die lateinische und die griechische Sprache. 1661 immatrikulierte sich Leibniz an der Leipziger Universität und betrieb philosophische Studien. 1672 reiste Leibniz als Diplomat nach Paris. Dort unterbreitete er dem „Sonnenkönig“ Ludwig XIV. einen Plan für einen kreuzzugähnlichen Eroberungsfeldzug gegen Ägypten, um ihn von den geplanten Eroberungskriegen in Europa abzubringen. Der König lehnte diesen Plan ab; über einhundert Jahre später jedoch setzte Napoléon Bonaparte ihn in der Ägyptischen Expedition um. 1672/73 vollendete Leibniz Arbeiten an einer Rechenmaschine mit Staffelwalze für die vier Grundrechenarten und wurde Mitglied der Londoner „Royal Society“. Leibniz wird oft als letzter Universalgelehrter bezeichnet. Zu seine Name sind auch Pläne für ein Unterseeboot und Verbesserung der Technik von Türschlössern gebundet. Er war einer der ersten die das Infinitesimalrechnung (Integralrechnung und Differentialrechnung) Matrizen und Determinanten benützt hat. Leibniz betrachtete die Wissenschaft als eine Einheit. Seine Erkenntnisse in der Integralrechnung, die Theorie der unendlichen Reihen, seine neuartige Geometrie, die Theorien der Kombinatorik, die Vorstellung über die Grundlagen der Mathematik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelten sich in enger Verbindung mit seinen philosophischen Ansichten. Das gleiche trifft auf seine Erkenntnisse der Dynamik, auf die biologischen und geologischen Konzeptionen sowie auf die Forschungen im Bereich der praktischen Politik und der theoretischen Geschichtswissenschaft zu.

Während eines Parisaufenthalts in den Jahren 1672 bis 1676 trat Leibniz in Kontakt zu führenden Mathematikern seiner Zeit. Ohne sichere theoretische Grundlage lernte man damals, unendliche Folgen und Reihen aufzusummieren. Leibniz fand ein Kriterium zur Konvergenz alternierender Reihen (Leibniz-Kriterium), aus dem

insbesondere die Konvergenz der sogenannten Leibniz-Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ folgt. Mit-

tels geometrischer Überlegungen fand er auch deren Grenzwert $\frac{\pi}{4}$. Durch Summation von Reihen gelangte Leibniz 1675 zur Integral- und von dort zur Differentialrechnung; er dokumentierte seine Erfindung 1684 mit einer Veröffentlichung in den

acta eruditorum. Nach heutigen Massstäben (Priorität der Erstveröffentlichung) würde er als alleiniger Erfinder der Infinitesimalrechnung gelten; diese Betrachtung ist jedoch anachronistisch, da wissenschaftliche Kommunikation im 17. Jahrhundert primär mündlich und per Briefwechsel erfolgte. Bleibender Verdienst von Leibniz ist insbesondere die heute noch übliche Notation von Differentialen (mit einem Buchstaben d von lat. *differentia*), Differentialquotienten (dy/dx) und Integralen ($\int dx$; das Integralzeichen ist abgeleitet aus dem Buchstaben S von lat. *summa*). Der englische Naturwissenschaftler Sir Isaac Newton hatte die Grundzüge der Infinitesimalrechnung bereits 1666 entwickelt. Jedoch veröffentlichte er seine Ergebnisse erst 1687. Daraus entwickelte sich Jahrzehnte später der vielleicht berühmteste Prioritätsstreit der Wissenschaftsgeschichte. Leibniz entwickelte auch die Dyadik (Dualsystem) mit den Ziffern 0 und 1 (Dualzahlen), die für die moderne Computertechnik von grundlegender Bedeutung ist.